§ 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Используя основной закон динамики, можно вывести дифференциальные уравнения движения материальной точки в различных системах координат. По аксиоме о связях и силах реакций связей можно получить дифференциальные уравнения движения и несвободной точки так же, как и для свободной, только ко всем приложенным к точке силам надо добавить силы реакций связей.

Силы реакций связей при движении точки могут зависеть в общем случае не только от вида наложенных на точку связей и приложенных к ней сил, но и от характера ее движения, например от ее скорости при движении в воздухе или в какой-либо другой сопротивляющейся среде. В дальнейшем не будем делать различия между свободной и несвободной материальными точками. Обозначая равнодействующую всех заданных сил и сил реакций связей $\bar{F}$, а массу точки m, получаем

$$m\bar{a}=\bar{F}. \qquad (7)$$

Из кинематики точки известно, что ускорение $\bar{a}$ выражается через радиус-вектор $\bar{r}$ (рис. 3):

$$\bar{a}=\mathrm{d}^2\bar{r}/\mathrm{d}t^2.$$

Дифференциальное уравнение движения материальной точки в векторной форме имеет вид

$$m\frac{\mathrm{d}^2\bar{r}}{\mathrm{d}t^2}=\bar{F}. \qquad (8)$$

Если спроецировать обе части уравнений (7) или (8) на координатные оси, то можно получить дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на эти оси.

В декартовой системе координат в общем случае

$$ma_x=F_x; \quad ma_y=F_y; \quad ma_z=F_z.$$

Проекции ускорения на координатные оси можно выразить через вторые производные по времени от координат движущейся точки:

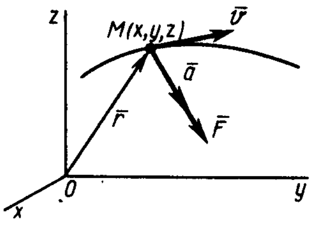

Рис. 3

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}; \quad a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}; \quad a_z=\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}.$$

Дифференциальные уравнения движения материальной точки в прямоугольной декартовой системе координат имеют вид

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=F_x; \quad m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=F_y; \quad m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}=F_z. \qquad (9)$$

Частные случаи. Если известно, что материальная точка движется в одной и той же плоскости, то, принимая ее за координатную плоскость Oxy, имеем

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=F_x; \quad m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=F_y. \qquad (10)$$

Так как $z=0$, то, следовательно, $F_z=0$.

В случае движения точки по прямой линии, направив по ней координатную ось Ox, получим одно дифференциальное уравнение прямолинейного движения точки

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=F_x. \qquad (11)$$

Так как при движении $y=z=0$, то, следовательно, $F_y=F_z=0$.

Для естественных подвижных осей координат (рис. 4), проецируя обе части (7) на эти оси, получаем:

$$ma_\tau=F_\tau; \quad ma_n=F_n; \quad ma_b=F_b,$$

где a_τ, a_n, a_b и F_τ, F_n, F_b — соответственно проекции ускорения и равнодействующей силы на касательную, главную нормаль и бинормаль к траектории в рассматриваемом положении движущейся точки. Учитывая, что

$$a_\tau=\mathrm{d}^2s/\mathrm{d}t^2; \quad a_n=v^2/\rho; \quad a_b=0,$$

где ρ — радиус кривизны траектории, дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на естественные оси имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &m\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=F_\tau;\\ &m\frac{v^2}{\rho}=F_n; \quad 0=F_b. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Второе уравнение из (12) можно преобразовать:

$$\rho=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi}; \quad \frac{v^2}{\rho}=v\frac{v}{\rho}=v\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\mathrm{d}s/\mathrm{d}\varphi}=v\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t},$$

где $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$ — угловая скорость вращения касательной к траектории движущейся точки и, следовательно, $\mathrm{d}\varphi$ — угол смеж-

ности между касательными в двух бесконечно близких точках.

Дифференциальные уравнения (12) можно представить в виде

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=F_\tau; \; mv\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=F_n; \; 0=F_b. \qquad (12')$$

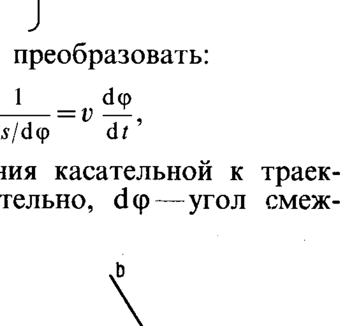

Рис. 4

Эта форма дифференциальных уравнений движения точки удобна при исследовании некоторых случаев полета снарядов и ракет, особенно по траектории, лежащей в плоскости. Тогда φ будет углом между касательной к траектории и любой осью, лежащей в плоскости траектории.

Дифференциальные уравнения движения точки можно представить в любой другой системе координат. Для этого надо знать выражения проекций ускорения на эти оси координат.